Déplacements et antidéplacements

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

I. Ecriture complexe d'une isométrie du plan

Soit f une isométrie qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.
L'expression de z' en fonction de z est appelée écriture complexe de f.

II. Etude des déplacements.

II-1. Ècriture complexe d'un déplacement

Tout déplacement , d'angle θ, a une écriture complexe de la forme $z' = e^{i\theta} z + b$ où b est nombre complexe.

Réciproquement : toute transformation f d'écriture complexe $z' = a z + b$, où $|a| = 1$ et b un nombre complexe est un déplacement du plan d'angle θ un argument de a.

II-2. Caractérisation complexe des déplacements.

- Si $a = 1$, ($\theta = 2k\pi$, k entier relatif) , alors :

  f est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b

- Si $|a| = 1$ et $a \neq 1$, alors :

  f est la rotation de centre Ω d'affixe ω tel que $\omega = a\omega + b$ et d'angle

  $\theta = \arg(a) + 2k\pi$, k entier relatif , et on a : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

Déplacements et antidéplacements

III. Etude des antidéplacements.

III-1. Ecriture complexe d'un antidéplacement

Tout antidéplacment a une écriture complexe sous la forme $z' = a\bar{z} + b$

a étant un nombre complexe tel que $|a| = 1$ et b un nombre complexe quelconque.

Rappelons qu'un antidéplacement est :

- soit une symétrique orthogonale ;
- soit une symétrie glmissante , pouvant s'écrire comme la composée, dans n'importe quel ordre, d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ) et d'une translation dont le vecteur dirige cette droite (Δ).

Propriété :

Si f est un antidéplacement alors $f \circ f$ est :

- Soit l'identité et tous les points sont invariants par $f \circ f$.
- Soit une translation de vecteur non nul et alors aucun point n'est invariant par $f \circ f$.

III-2. Caractérisation complexe des antidéplacements.

Soit f un antidéplacement d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ avec $|a| = 1$, on note O' l'image de O par f et soit $O'' = f(f(O))$, d'affixe $a\bar{b} + b$

- Si $a\bar{b} + b = 0$ alors O est invariant par $f \circ f$ et $f \circ f$ est l'identité du plan.
  Il en résulte que f est une symétrie orthogonale d'axe est l'ensemble des points invariants par f.

- Si $a\bar{b} + b \neq 0$ alors O n'est pas invariant par $f \circ f$ et $f \circ f$ est une translation.
  Il en résulte que f est une symétrie glissante .
  On détermine l'écriture complexe de la translation $f \circ f$ de vecteur $\vec{v}$.
  La symétrie glissante aura pour vecteur $\vec{u} = \frac{1}{2} \cdot \vec{v}$, et comme axe la droite passant par I milieu de $[O; O']$ et de vecteur directeur $\vec{u}$.